

Problem Set 17: 代数系统引论

提交截止时间：4 月 29 日 10:00

Problem 1

设 S 为 n 元集, 问

- (1) 集合 S 上可以定义多少个不同的二元运算?
- (2) 其中有多少个二元运算是可交换的?
- (3) 其中有多少个二元运算是幂等的? (注: 幂等的定义请自行查阅)
- (4) 其中有多少个二元运算是既不可交换又不幂等的?

Problem 2

设 $A = \{0, 1\}$, $S = A^A$,

- (1) 试列出 S 中的所有元素;
- (2) 给出 S 上函数复合运算的运算表, 并指出单位元、零元和每一个可逆元素的逆元.

Problem 3

设 $A = \{a, b, c\}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, 能否确定 a, b, c 的值使得

- (1) A 对普通加法封闭?
- (2) A 对普通乘法封闭?

Problem 4

判断下列集合对所给的二元运算是否封闭, 并说明理由.

- (1) 非零整数集合 \mathbb{Z}^* 和普通的除法运算.

(2) 全体 $n \times n$ 实可逆矩阵集合关于矩阵加法和乘法运算, 其中 $n \geq 2$.

(3) 正实数集合 \mathbb{R}^+ 和 \circ 运算, 其中 \circ 运算定义为:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, a \circ b = ab - a - b$$

(4) $\mathbb{S} = \{x | x = \ln n, n \in \mathbb{Z}^+\}$ 关于普通的加法和乘法运算.

Problem 5

\mathbb{R} 为实数集, 定义以下 4 个函数 f_1, f_2, f_3, f_4 . $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 有

$$\begin{aligned} f_1((x, y)) &= x \cdot y, & f_2((x, y)) &= x - y, \\ f_3((x, y)) &= \max(x, y), & f_4((x, y)) &= |x - y|. \end{aligned}$$

(1) 判断上述二元运算是否为可交换, 可结合, 幂等的.

(2) 求上述二元运算的单位元, 零元以及每一个可逆元素的逆元.

(3) 设 $A = \{a, b\}$, 试给出 A 上一个不可交换, 也不可结合的二元运算.

Problem 6

设 $S = \{1, 2, \dots, 10\}$, 问下面定义的运算能否与 S 构成代数系统 $\langle S, * \rangle$? 如果能, 则说明 $*$ 运算是否满足交换律、结合律, 并给出单位元和零元.

(1) $x * y = \gcd(x, y)$, $\gcd(x, y)$ 是 x 与 y 的最大公约数.

(2) $x * y = \text{lcm}(x, y)$, $\text{lcm}(x, y)$ 是 x 与 y 的最小公倍数.

(3) $x * y = \max(x, y)$.

(4) $x * y =$ 质数 p 的个数, 其中 $x \leq p \leq y$.

Problem 7

判断集合 $A = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ 与 } 5 \text{ 互素} \}$ 能否构成代数系统 $V = \langle \mathbb{N}, + \rangle$ 的子代数, 并说明理由.

(本题请参考并自学教材【屈婉玲】pp.174-175 关于子代数的部分)

Problem 8

设集合 $A = \{a, b, c, d\}$ 上的一个二元运算 \circ 如下表所示:

(1) 说明运算是否可结合? 为什么?

\circ	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	d
c	c	d	a	d
d	d	d	d	d

(2) 求单位元与零元.

Problem 9

设集合 $A = \{a, b, c\}$, \circ 是 A 上的二元运算, 在 $V = \langle A, \circ \rangle$ 的运算表中, 除了 $a \circ b = a$ 以外, 其余运算结果都等于 b . 试给出 $V = \langle A, \circ \rangle$ 的两个非恒等映射的自同态.

(自同态: 如果映射 f 是 V 到 V 的, 则称 f 为自同态.)

Problem 10

设 $S = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, \mathbb{Q} 为有理数集, 定义二元运算 $*$ 为:

$$\langle a, b \rangle * \langle x, y \rangle = \langle ax, ay + b \rangle$$

试分析代数系统 $\langle S, * \rangle$ 的性质 (运算是否具有交换性、结合性、幂等性; 系统是否具有单位元、零元, 全部元素或者特定元素是否具有逆元) .

Problem 11

设 $V_1 = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$, $V_2 = \langle \mathbb{Z}_n, \oplus, \otimes \rangle$, 其中 \mathbb{Z} 为整数集, $+, \cdot$ 为普通加法与乘法, $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, \oplus 和 \otimes 分别为模 n 加法与乘法. 定义映射 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$, $f(x) = x \bmod n$. 证明 f 是 V_1 到 V_2 的满同态映射.